数理解析研究所講究録
225巻 1975年 248-261

孤立特異点をもつ超曲面の有限鏡映群による商空間

東大 理 大学院 川崎徹郎

一般にある超平面を不動にする線型変換を鏡映という。$G \subset U(n+1)$ を鏡映から生成される有限部分群とする。その時、G－不変な多項式のつくる環は $(n+1)$－変数の多項式環と同型で、生成元として斉次多項式がとれる。$\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}$ を代数的に独立な生成元とすると写像

$$\mathbb{C}_z^{n+1}/G \xrightarrow{(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1})} \mathbb{C}_w^{n+1}$$

は解析空間としての同型を与える。

今、原点に孤立特異点をもつ G－不変な多項式 f を考える。すると f は $\mathbb{C}_w^{n+1}$ 上の多項式 f' で分解される。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_z^{n+1} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & & \mathbb{C} \\
\mathbb{C}_z^{n+1}/G \cong \mathbb{C}_w^{n+1} \arrow[urr, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

df は原点でのみ 0 になるから，df' もそうである。f' の定義する孤立特異点と f' の定義する孤立特異点の関係を調べよう。

1. 回転可能構造とSeifert形式

定義．閉多様体 M^n の回転可能構造とは

1) M の分解　$M = E \underset{\partial E = \partial N}{\cup} N$.
2) E の S^1 上の繊維束としての構造　$\varphi : E \longrightarrow S^1$
（この繊維 F を回転可能構造の生成元という。）
3) N の積への分解　$N \cong X \times D^2$．但し X は $(n-2)$-次元の閉多様体，D^2 は2次元円板。（X を回転可能構造の軸という。）
4) 次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] E \arrow[drr, "\varphi"'] & \supset \partial E = \partial N \cong & X \times S^1 \arrow[d, "射影"] \\ & & S^1 \end{tikzcd}$$

で定義される構造

一般に原点に孤立特異点をもつ多項式 f があると，

$$\begin{cases} S_\varepsilon^{2n+1} = \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(D_\delta)} \underset{S^{2n+1}\cap f^{-1}(S^1_\delta)}{\cup} S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(D_\delta) \\ \arg f : \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(D_\delta)} \longrightarrow S^1 \end{cases}$$

$$(\; 0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1 \;)$$

はS^{2n+1}上の回転可能構造を与える。これをfの定める回転可能構造という。（ε, δのとり方によらない。）

繊維空間 $S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(D_\delta) \longrightarrow S^1$ はMilnor繊維空間と同型であることに注意しよう。回転可能構造とはMilnor繊維空間の定める構造を微分位相的に一般化，厳密化したものである。

$S^{2n+1} = E \underset{\partial E = \partial N}{\cup} N$, $\varphi: E \longrightarrow S^1$ をS^{2n+1}上の回転可能構造とする。さらにその生成元FはS^nの花束と同じホモトピー型をもつとする。繊維空間 $E \to S^1$ を $\exp: \mathbb{R} \to S^1$ によって引戻そう。

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E} \arrow[r] \arrow[d, "\exp^*\varphi"] & E \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}$上の繊維空間は自明だから，自明化 $\theta: F \times \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{E}$ がある。$t \in S^1$ 上のφの繊維をF_tと書く時，

$\theta_t : F \longrightarrow F_t$ を θ の $F \times \{t\}$ への制限としよう。$\theta_{2\pi} \circ \theta_0^{-1}$ は幾何的モノドロミーである。

この時、Seifert形式とは $H_n(F)$ 上の双一次形式 $\gamma : H_n(F) \otimes H_n(F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ で

$$\gamma(x, y) = L_{S^{2n+1}}((\theta_0)_* x, (\theta_\pi)_* y)$$

$$(L_{S^{2n+1}}(\ ,\ ) \text{ は } S^{2n+1} \text{ でのまつわり数})$$

で定義されるものである。詳しくは

$$\beta : H_n(F) \underset{\cong}{\xrightarrow{(\theta_0)_*}} H_n(F_0) \underset{\cong}{\xleftarrow{\partial}} H_{n+1}(S^{2n+1}, F_0) \underset{\cong}{\xleftarrow{D}} H^n(S^{2n+1} - F_0) \underset{\cong}{\xrightarrow{i^*}} H^n(F_\pi) \underset{\cong}{\xrightarrow{(\theta_\pi)^*}} H^n(F)$$

とおくとき（D は Poincaré - Lefschetz 双対　$i : F_\pi \subset S^{2n+1} - F_0$）

$$\gamma(x, y) = \langle \beta x, y \rangle$$

である。

<u>定理</u>（Kato）．　$n \geqq 3$ の時、S^{2n+1} 上の、生成元が S^n の花束と同じホモトピー型をもつ回転可能構造と、有限生成自由 $\mathbb{Z}$-加群上のユニモジュラー双一次形式（$\det = 1$ の行列で代表される双一次形式）とは、Seifert形式によって双射的に対応する。

さらに $H_n F$ のある基底について、交わり行列 S,

モノドロミー行列ΦはSeifert行列Γによって次の様に表わされる。

$$S = -\Gamma + (-1)^{n+1}\,{}^t\Gamma$$
$$\Phi = (-1)^{n+1}\,{}^t\Gamma \cdot \Gamma^{-1}$$

系. fを原点に孤立特異点をもつ多項式とする。fの定める回転可能構造はfのSeifert形式により完全に定まる。（微分同型を除いて）

注意. 与えられたユニモジュラー行列がいつ多項式のSeifert行列になるかはわからない。但し多項式で定まるSeifert行列はある基底をとると対角成分が$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$の上三角行列になることがわかる（Durfee）

2. G-不変多項式のSeifert形式

$G \subset U(n+1)$を鏡映から生成される有限部分群、fを原点に孤立特異点をもつG-不変多項式、$f = f' \circ \pi$をfの分解とする。

命題. S^{2n+1}/GはS^{2n+1}に位相同型。

証明．　S^{2n+1} を $\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}$ の線型な $\mathbb{R}^+$－作用による商空間と考える。すると

$$S^{2n+1}/G = (\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}/\mathbb{R}^+)/G.$$

ところが $\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}$ 上の $\mathbb{R}^+$－作用と G－作用は交換するから、

$$S^{2n+1}/G = (\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}/G)/\mathbb{R}^+$$

ここで，$\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}/G \cong \mathbb{C}_w^{n+1}-\{0\}$ である。$\mathbb{C}_w^{n+1}$ 上に導入される $\mathbb{R}^+$－作用は

$$t\cdot(w_0,\cdots,w_n)=(t^{d_1}w_0,\cdots,t^{d_{n+1}}w_n),\ t\in\mathbb{R}^+$$

$(d_1,\cdots,d_{n+1}$ は $\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1}$ の次数$)$

である。ところがこの作用は線型な $\mathbb{R}^+$－作用と位相的に同型である。従って結論を得る。

今 f を G－不変としたから，f の定める回転可能構造

$$\begin{cases} S_\varepsilon^{2n+1} = \overline{S_\varepsilon^{2n+1}-f^{-1}(D_\delta)} \underset{S_\varepsilon^{2n+1}\cap f^{-1}(S_\delta^1)}{\cup} S^{2n+1}\cap f^{-1}(D_\delta) \\ \arg f:\ \overline{S_\varepsilon^{2n+1}-f^{-1}(D_\delta)} \longrightarrow S^1 \end{cases}$$

は G－安定なことに注意しよう。G－作用による商空間を作

ると、

$$\begin{cases} S_\varepsilon^{2n+1}/G = \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - f'^{-1}(D_\delta)}/G \underset{(S^{2n+1} \cap f'^{-1}(S'_\delta))/G}{\cup} (S_\varepsilon^{2n+1} \cap f'^{-1}(D_\delta))/G \\ \quad \mathrel{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \quad S^{2n+1} \\ \arg f/G : \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(D_\delta)}/G \longrightarrow S^1 \end{cases}$$

は再び S^{2n+1} 上の（位相的な）回転可能構造を定義する。ここで $\arg f$ の t 上の繊維を F_t, $\arg f/G$ の t 上の繊維を F'_t とおこう。G−作用は繊維を保存するから $F'_t = F_t/G$ である。

今、$\mathbb{C}_w^{n+1}$ の中の ε−球面 $S_{w,\varepsilon}^{2n+1}$ と $S_{z,\varepsilon}^{2n+1}/G$ とは違うことに注意しよう。しかし $S_{w,\varepsilon}^{2n+1}$ と $S_{z,\varepsilon}^{2n+1}/G$ の間の位相同型でその上の函数 f' と f/G の値の偏角を一致させるものがある。このことは S_ε^{2n+1}/G 上の回転可能構造が、f' の定める回転可能構造と、位相的に同型であることを示している。以後我々は両者を同一視する。

定理．　G, f, f' は今までの通り、F, F' をそれぞれ f, f' の Milnor 繊維空間の繊維とする。$\pi : F \to F/G \cong F'$ を自然な射影とする。この時、f, f' の定める Seifert 形式 γ, γ' につき、次のことが成立つ。$x \in H_n(F)^G$, $y \in H_n(F)$ とすると

$$\gamma'(\pi_* x, \pi_* y) = |G| \cdot \gamma(x, y)$$

<u>系</u>. F, F' の交わり形式 S, S' の間には次の関係が成立つ。
$x \in H_n(F)^G$, $y \in H_n(F)$ について

$$S'(\pi_* x, \pi_* y) = |G| \cdot S(x, y)$$

定理の証明. 次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\beta: H_n(F) \arrow[r, "(\Theta_0)_*", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(F_0) \arrow[d, "\pi_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n+1}(S_\varepsilon^{2n+1}, F_0) \arrow[l, "\partial"', "\cong"] \arrow[d, "\pi_*"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & H^n(S_\varepsilon^{2n+1} - F_0) \arrow[l, "D"', "\cong"] \arrow[r, "i^*", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^n(F_\pi) \arrow[r, "(\Theta_\pi)^*", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^n(F) \\
\beta': H_n(F') \arrow[r, "(\Theta_0')_*", "\cong"'] & H_n(F_0') & H_{n+1}(S', F_0') \arrow[l, "\partial"', "\cong"] & H^n(S' - F_0') \arrow[l, "D'"', "\cong"] \arrow[r, "i'^*", "\cong"'] \arrow[u, "\pi^*"] & H^n(F_\pi') \arrow[r, "(\Theta_\pi')^*", "\cong"'] \arrow[u, "\pi^*"] & H^n(F') \arrow[u, "\pi^*"]
\end{tikzcd}$$

ここで $S' = S_\varepsilon^{2n+1}/G \ (\cong S^{2n+1})$, すると

$$\gamma(x, y) = \langle \beta x, y \rangle \quad , \quad \gamma'(x', y') = \langle \beta' x', y' \rangle$$

である。上列のすべての写像は G-同変, $(*)$を除いてすべて可換である。$(*)$の部分を調べよう。S_ε^{2n+1} の基本類を $[S] \in H_{2n+1}(S_\varepsilon^{2n+1})$, S_ε^{2n+1}/G の基本類を $[S'] \in H_{2n+1}(S_\varepsilon^{2n+1}/G)$ とすると,

$$\pi_* [S] = |G| \cdot [S']$$

である。従って

$$\pi_* \circ D \circ \pi^* = |G| \cdot D'$$

今，$H^n(S_\varepsilon^{2n+1} - F_0)$，$H^n(S' - F_0')$ は共に $\mathbb{Z}$ の直和で，

$$\pi_* : H^n(S' - F_0' ; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^n(S_\varepsilon^{2n+1} - F_0 ; \mathbb{Q})^G$$

は同型だから，$x \in H_n(F)^G$ に対し

$$D^{-1} \circ \partial^{-1} \circ (\theta_0)_* x = \pi^* \alpha$$

となる $\alpha \in H^n(S' - F_0' ; \mathbb{Q})$ がある。従って

$$\pi^* \beta' \pi_* x = |G| \cdot \beta x$$

これより直ちに結論が得られる。

注意．特に f が重みつき斉次の時，f のモノドロミーと G の作用は交換する．従って次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} H_n(F) & \xrightarrow{\pi_*} & H_n(F') \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi' \\ H_n(F) & \xrightarrow{\pi_*} & H_n(F') \end{array} \qquad (\Phi, \Phi', \text{はモノドロミー})$$

3. 例

I. Gを$(n+1)$-文字$\{0,1,\cdots,n\}$の置換のつくる対称群$\mathfrak{S}_{n+1}$とする。$\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$の$\mathbb{C}^{n+1}$上の作用は

$$\sigma\cdot(z_0,\cdots,z_n)=(z_{\sigma^{-1}(0)},\cdots,z_{\sigma^{-1}(n)})$$

である。fとしてFermat型の多項式

$$f(z)=z_0^d+\cdots+z_n^d$$

をとる。$\mathfrak{S}_{n+1}$で不変な多項式の全体は基本対称式$\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1}$で生成されるから、$f'$は重みが$(d;1,2,\cdots,n+1)$の重みつき斉次多項式である。$f'$のMilnor数は$\binom{d-1}{n+1}$である。$f,f'$のMilnor纖維空間の纖維$F,F'$はそれぞれ$V_d=\{z\in\mathbb{C}_z^{n}\mid f(z)=1\}$
$V_d'=\{w\in\mathbb{C}_w^{n+1}\mid f'(w)=1\}=V_d/\mathfrak{S}_{n+1}$と同一視される。

結果1. V_d'は標準$(d-1)$-単体のn-切片(次元$\leqq n$の単体の作る部分複体)と同じホモトピー型をもち、標準写像$\pi: V_d\to V_d/\mathfrak{S}_{n+1}=V_d'$はホモロジー群の全射を導く。

証明. Brieskorn型の超曲面の研究により

$$U_d=\{z\in V_d\mid z_i^d: \text{real}\geqq 0,\ i=0,1,\cdots,n\}$$

とおくと，U_d は V_d の変形レトラクトで

$$U_d \simeq \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d \quad (d\text{-点の}(n+1)\text{-個の結})$$

であることがわかり，さらにその変形レトラクションを見ると

$$V_d/\mathfrak{S}_{n+1} \simeq U_d/\mathfrak{S}_{n+1} \cong \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d/\mathfrak{S}_{n+1}$$
$$(\mathfrak{S}_{n+1} \text{ の } \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d \text{ への作用は因子の置換})$$

がわかる。あとは純粋に組合わせ位相幾何的な考察で

$$\mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d \gtrsim (\Delta^{d-1})^n$$

を得る。同時に鎖複体の対応もわかり，ホモロジーに関する結果を得る。

$H_n(V_d)$ 上の Seifert 形式，交わり形式については次のことが知られている。

$$r = (r_0, \cdots, r_n), \quad 0 \leqq r_i \leqq d-2, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

に対して，$l_r \in H_n(V_d)$ があって，$\{l_r\}$ は $H_n(V_d)$ の基底となる。この時，Seifert 形式，交わり形式は次のようになる。

$$\gamma(l_r, l_s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i + 1 \\ & (i = 0, 1, \cdots, n) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$S(\ell_r, \ell_s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_i-1 \leqq r_i \leqq s_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

このことと，前の節の考察を合わせると次の結果を得る。

結果 2.　$H_n(V_d')$ の階数は $\binom{d-1}{n+1}$ で

$$R = \{r_0, \cdots, r_n\} \qquad 0 \leq r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqq d-2$$

なる R に対して $H_n(V_d')$ の元 ℓ_R' が存在して $\{\ell_R'\}$ は $H_n(V_d')$ の基底となる。この時 Seifert 形式，交わり形式は次のようである。

$$\gamma(\ell_R', \ell_S') = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$S(\ell_R', \ell_S') = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_i-1 \leqq r_i \leqq s_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

II.　G が D_{n+1} 型の Weyl 群 $W(D_{n+1})$ とする。群 $W(D_{n+1})$ は $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ と　$\varepsilon = (\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_n)$，$\varepsilon_i = \pm 1$，$\sum \varepsilon_i \equiv 0 \pmod 2$

で生成され，その $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の作用は

$$\sigma\cdot(z_0,\cdots,z_n) = (z_{\sigma^{-1}(0)},\cdots,z_{\sigma^{-1}(n)})$$

$$\varepsilon\cdot(z_0,\cdots,z_n) = (\varepsilon_0 z_0,\cdots,\varepsilon_n z_n)$$

である。今 f として

$$f = z_0^{2d} + \cdots + z_n^{2d}$$

をとると $W(D_{n+1})$ で不変である。この時 f' は重みが $(2d;2,4,\cdots,2n,n+1)$ の重みつき斉次多項式で，その Milnor 数は $\binom{d-1}{n+1}+\binom{d}{n+1} = 2\binom{d-1}{n+1}+\binom{d-1}{n}$ である。

結果1.

$$V_{2d}/W(D_{n+1}) \simeq (\Delta^{d-1})^n \underset{(\Delta^{d-1})^{n-1}}{\cup} (\Delta^{d-1})^n$$

（標準 $(d-1)$-単体の n-切片 2つを $(n-1)$-切片のところで貼合わせたもの）

$$H_n(V_{2d}) \xrightarrow{\pi_*} H_n(V_{2d}/W(D_{n+1})) \ ;\ \text{全射}.$$

結果2.

$$\left\{ R = \{r_0, r_1, \cdots, r_n\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{i)}\ 0 \leq r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leq d-1 \\ \text{又は} \\ \text{ii)} \begin{cases} 0 \leq r_n - d < r_0 < r_1 < \cdots < r_{n-1} \leq d-2 \\ r_{n-1} < r_n < r_0 + d \end{cases} \end{array} \right\}$$

なる R に対して $H_n(V_{2d}/W(D_{n+1}))$ の元 ℓ''_R があって $\{\ell''_R\}$ は $H_n(V_{2d}/W(D_{n+1}))$ の基底。Seifert 形式，交わり形式は

$$\gamma(\ell''_R, \ell''_S) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

$$S(\ell''_R, \ell''_S) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_i - 1 \leqq r_i \leqq s_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である。